

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题答案

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

- (1) (C)
- (2) (C)
- (3) (C)
- (4) (D)
- (5) (A)
- (6) (B)
- (7) (B)
- (8) (B)

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 答案: $e^{\frac{1}{2}}$

(10) 答案: $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

(11) 答案: $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$

(12) 答案: $y + x - \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = 0$

(13) 答案: $y = e^{3x} - e^x - xe^{2x}$

(14) 答案: -1

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 解析: 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = 1$$

又因为:

$$\begin{aligned}
 & 1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \\
 &= 1 - \cos x + \cos x - \cos x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \\
 &= 1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x) \\
 &\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{ax^n} + \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{ax^n} + \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2)}{ax^n} + \frac{\frac{1}{2}(3x)^2 + o(x^2)}{ax^n} \right)
 \end{aligned}$$

所以 $n = 2$ 且 $\frac{1}{2a} + \frac{4}{2a} + \frac{9}{2a} = 1 \Rightarrow a = 7$

(16) 解析: 由题意可得:

$$V_x = \pi \int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y = 2\pi \int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}}$$

因为: $V_y = 10V_x$ 所以 $\frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5} \pi a^{\frac{5}{3}} \Rightarrow a = 7\sqrt{7}$

(17) 解析: $\iint_D x^2 dx dy = \iint_{D_1} x^2 dx dy + \iint_{D_2} x^2 dx dy$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy \\
 &= \frac{416}{3}
 \end{aligned}$$

(18) 解析: (1) 令 $F(x) = f(x) - x, F(0) = f(0) = 0, F(1) = f(1) - 1 = 0,$

则 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 1$

(2) 令 $G(x) = e^x(f'(x) - 1)$, 则 $G(\xi) = 0,$

又由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f'(x)$ 为偶函数, 可知 $G(-\xi) = 0,$

则 $\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ 使 $G'(\eta) = 0,$

即 $e^\eta[f'(\eta) - 1] + e^\eta f''(\eta) = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

(19) 最长 $\sqrt{2}$, 最短 1

(20) 答案: (1)、1

(2)、由于 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$, 则 $\frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$, 即 $x_{n+1} > x_n$, 故 x_n 单调递增。

又由于 $\ln x_n < \ln x_n + \frac{1}{x_n+1} < 1$, 则 $x_n < e$, 故 x_n 有上界, 则由单调有界收敛定理可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在。

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(nx_n + \frac{1}{x_n} \right) = \ln a + \frac{1}{a}$, 由于 $\ln x_n + \frac{1}{x_n+1} < 1$, 则

$\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$, 故 $a = 1$ 。

(21) 答案: (1)、 $\frac{e^2-1}{4} + 1 = \frac{e^2+3}{4}$

$$(2)、x = \frac{\int_1^e x \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) dx}{\int_1^e \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) dx} = \frac{\frac{e^4 - 2e^2 + 1}{4}}{\frac{e^3 - 7}{3}}$$

(22) 答案:

$$b = 0, a = -1$$

$$C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

(23) 答案: (1)

$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2 + (4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f \text{ 的矩阵为 } & \begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix} \\ & = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T \end{aligned}$$

(2) 令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则 $A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$, $A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$, 则 1, 2 均为 A 的特征值, 又由于 $r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$, 故 0 为 A 的特征值, 则三阶矩阵 A 的特征值为 2, 1, 0, 故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$